JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 1, 365–373 (1968)

Lineare Approximationsoperatoren in (M)-Räumen

EBERHARD SCHOCK

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn

Bei der Approximation von Funktionen bezüglich einer stetigen Norm durch lineare Teilräume stellt sich die Frage, wie man die Teilräume zu wählen hat, um zu möglichst günstigen Fehlerschranken zu kommen. Zugleich ergibt sich das Problem, die Fehler der Ableitungen abzuschätzen. Als Maß für die Güte der Approximation bietet sich die Konvergenzgeschwindigkeit der Minimalabweichung des Elementes x vom n-dimensionalen Teilraum E_n bezüglich der stetigen Norm p_U

$$\rho(x, p_U, E_n) = \inf\{p_U(x-y),\ y \in E_n\}$$

an, d.h. wir fragen nach Nullfolgen $\{\alpha_n\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1}\, \rho(x, p_U, E_n) = 0.$$

Wie man weiß, versagt dieses Kriterium in (B)-Räumen (Korollar 1). Wir zeigen, daß die einzigen (F)-Räume, in denen dieses Kriterium sinnvoll angewendet werden kann, (M)-Räume sind, d.h. Räume, in denen jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt ist. In (M)-Räumen mit p-absoluter regulärer Basis geben wir lineare Operatoren L an, die jedem $x \in E$ eine Approximation Lx zuordnen, für die wir eine Fehlerabschätzung angeben können. In der Bezeichnungsweise schließen wir uns Köthe [3] und Pietsch [5] an.

Es sei E ein lokalkonvexer Raum, $\mathfrak{U}(E)$ sei ein Fundamentalsystem von abgeschlossenen absolutkonvexen Nullumgebungen U von E. Jedem $U \in \mathfrak{U}(E)$ entspricht eine stetige Halbnorm p_U

$$p_U(x) = \inf\{\tau > 0,\ x \in \tau U\}.$$

Für zwei Teilmengen A, B von E mit $A \subset B$ und einen n-dimensionalen Teilraum E_n von E sei

$$\delta(A, B, E_n) = \inf\{\delta > 0,\ A \subset \delta B + E_n\},$$
$$\delta_n(A, B) = \inf\{\delta(A, B, E_n),\ E_n \subset E,\ \dim E_n \leqslant n\}.$$

Für $x \in E$, $U \in \mathfrak{U}(E)$, $A \subset U$ sei

$$\rho(x, p_U, E_n) = \inf\{p_U(x-y),\ y \in E_n\},$$
$$\rho(A, p_U, E_n) = \sup\{\rho(x, p_U, E_n),\ x \in A\}.$$

Dann gilt (vgl. [6])

$$\rho(A, p_U, E_n) = \delta(A, U, E_n).$$

Als *diametrale Dimension* $\Delta_U(E)$ bezeichnet man nach Bessaga, Pelczynski, Rolewicz [1] und Pietsch [5] die Menge aller Zahlenfolgen $\delta = \{\delta_i, i \in \mathbf{I}\}$, $(\mathbf{I} = \{0, 1, 2, \ldots\})$ mit der Eigenschaft: Für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ gibt es ein $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$, so daß für alle $i \in \mathbf{I}$ gilt $\delta_i(V, U) \leqslant \delta_i$.

Wie das folgende Lemma zeigt, ist die diametrale Dimension nur in (M)-Räumen nicht trivial.

LEMMA 1. *Es sei E ein (F)-Raum. Es gebe ein $\delta \in \Delta_U(E)$ mit* $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$. *Dann ist E ein (M)-Raum.*

Beweis. Sei B eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von E, d.h. für alle $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt es ein τ_V mit $B \subset \tau_V V$. Zu $U \in \mathfrak{U}(E)$ gibt es nach Definition der diametralen Dimension ein $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $\delta_i(V, U) \leqslant \delta_i$, also ist $\delta_i(B, U) \leqslant \tau_V \delta_i$. Daher ist $\delta_i(B, U)$ für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullfolge, somit gibt es für $\epsilon > 0$ ein n mit $\delta_i(B, U) < \epsilon$ für alle $i \geqslant n$. Daher existiert nach Definition von $\delta_i(B, U)$ ein endlich dimensionaler Teilraum E_i von E mit $B \subset \epsilon U + E_i$. Weil $U_i = U \cap E_i$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als beschränkte, also kompakte Teilmenge eines endlich dimensionalen Teilraumes E_i angenommen werden kann, gibt es endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_k$ mit

$$(\delta_0(B, U) + \epsilon)\, U_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j + \epsilon U\}.$$

Ein beliebiges Element $x \in B$ läßt sich darstellen in der Form $x = \epsilon y + z$, $z \in E_i$, $y \in U$. Dann gilt

$$p_U(z) \leqslant \epsilon p_U(y) + p_U(x) \leqslant \epsilon + \delta_0(B, U).$$

Folglich hat man

$$x \in \epsilon U + (\epsilon + \delta_0(B, U))\, U_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j + 2\epsilon U\}.$$

Also ist B durch ein endliches (2ϵ)-Netz überdeckt und somit kompakt.

Gibt es in $\Delta_U(E)$ eine Nullfolge δ_i, so gibt es zu jeder beschränkten Teilmenge B und zu jeder Nullumgebung U eine Folge von i-dimensionalen Teilräumen E_i mit

$$\lim_{i \to \infty} \delta_i^{-1} \rho(x, p_U, E_i) = 0$$

für alle $x \in B$.

Wir beweisen nun eine Umkehrung dieses Sachverhaltes.

SATZ 1. *Sei E ein reflexiver (F)-Raum und $\{\alpha_i\}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen mit* $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$. *Für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ gebe es Teilräume E_i mit* $\dim E_i \leqslant i$, *so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}\, \rho(x, p_U, E_i) = 0.$$

Dann ist E ein (M)-Raum.

Beweis. Sei B eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von E. Für alle $\epsilon > 0$, für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ und für alle $i \in \mathbf{I}$ gibt es ein $x_i \in B$ mit

$$\rho(x_i, p_U, E_i) > \delta(B, U, E_i) - \epsilon.$$

Da B schwach kompakt ist, gibt es eine schwach gegen x_0 konvergente Teilfolge $\{x_{i_k}\}$ der Folge $\{x_i\}$. Daher gibt es ein k_0 mit

$$\rho(x_0, p_U, E_{i_k}) > \delta(B, U, E_{i_k}) - \epsilon$$

für alle $k \geqslant k_0$.

Also ist

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}\, \delta(B, U, E_i) = 0,$$

und wegen $\delta_i(B, U) \leqslant \delta(B, U, E_i)$

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}\, \delta_i(B, U) = 0.$$

Daher ist B kompakt, und E ist als (M)-Raum nachgewiesen.

Da ein (B)-Raum, in dem beschränkte Mengen relativkompakt sind, endlich dimensional ist, haben wir das

KOROLLAR 1. *Ist E ein reflexiver (B)-Raum, so folgt aus den Voraussetzungen von Satz* 1, *daß E endlich dimensional ist.*

Damit haben wir einen Satz von Bernstein erhalten (vgl. Timan [*9*], S. 40). Wie von Pallaschke [*4*] gezeigt wurde, gilt dieser Satz von Bernstein auch in einer großen Klasse von metrischen, z.B. in lokalbeschränkten Räumen.

KOROLLAR 2. *Ist E ein reflexiver (F)-Raum und $\alpha_i \leqslant (i+1)^{-3}$, so folgt aus den Voraussetzungen von Satz* 1, *daß E nuklear ist.*

Beweis. Nach Pietsch [*5*] ist *E nuklear,* wenn alle kanonischen Abbildungen $E(B, U)\colon E(B) \to E(U)$ nuklear sind. Dabei ist $E(B) = \bigcup_{n\in N} nB$, normiert mit der Norm p_B, B absolutkonvex und kompakt, $E(U) = E/p_U^{-1}\{0\}$, normiert mit der Norm p_U. Wegen $\delta_i(B, U) \leqslant \gamma(i+1)^{-3}$ mit einer Konstanten $\gamma > 0$ ist die kanonische Abbildung $E(B, U)$ aber nuklear. Wir vermerken noch, daß die Bedingung $\delta_i(B, U) \leqslant \gamma(i+1)^{-3}$ nur eine grobe Abschätzung ist.

Ist aber E nuklear, so gibt es zu jeder beschränkten Menge B und für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ schon Teilräume E_i mit

$$\lim_{i \to \infty} (i+1)^k \rho(x, p_U, E_i) = 0$$

für alle natürlichen Zahlen k und alle $x \in B$ (vgl. [*6*]).

Sei U, $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$, dann gibt es nach Definition der i-ten Durchmesser Teilräume E_i mit

$$\delta(V, U, E_i) = \inf\{\delta > 0,\ V \subset \delta U + E_i\} \leqslant 2\delta_i(V, U)$$

d.h. jedes $x \in V$ läßt sich darstellen in der Form

$$x = \delta y + z \quad \text{mit} \quad y \in U \quad \text{und} \quad z \in E_i.$$

Dann gilt

$$p_U(x - z) = p_U(\delta y) \leqslant \delta.$$

Damit erhalten wir für eine Fehlerabschätzung den

Satz 2. *Sei E ein lokalkonvexer Raum. Für alle U, $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$ gibt es Teilräume E_i von E mit* $\dim E_i \leqslant i$, *so daß gilt:*

Für alle $x \in E$ gibt es ein $z \in E_i$ mit

$$p_U(x - z) \leqslant 2\delta_i(V, U)\, p_V(x).$$

Für die praktischen Anwendungen ist die Aussage dieses Satzes noch zu schwach. Wir werden daher für gewisse lokalkonvexe Räume eine Methode angeben, die es erlaubt, sowohl die i-ten Durchmesser $\delta_i(V, U)$ zu berechnen als auch Teilräume E_i zu finden, deren Existenz in Satz 2 nachgewiesen wurde. Im wesentlichen geht diese Methode auf Dragilew [*2*] zurück.

Eine Folge $e_0, e_1, \ldots$ von Elementen eines lokalkonvexen Raumes E heißt eine *Basis*, wenn es für alle $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Zahlenfolge $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ gibt, so daß gilt

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \eta_i e_i.$$

Durch den Ansatz

$$\langle e_i, f_k \rangle = \delta_{ik}$$

oder

$$\eta_k = \langle x, f_k \rangle$$

werden Linearformen f_k auf E definiert, die stetig sind, wenn E z.B. ein (F)-Raum ist.

Eine Basis $\{e_i\}$ eines (F)-Raumes E heißt nach [*7*] *p-absolut*, ($p \geqslant 1$), wenn die Topologie von E auch durch das System der Halbnormen

$$q_U(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, f_i \rangle|^p p_U(e_i)^p \right)^{1/p}$$

erzeugt werden kann, dabei durchlaufe p_U ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen von E.

Eine p-absolute Basis heiße nach Dragilew [2] *regulär*, wenn für alle stetigen Halbnormen die Folge

$$\{p_U(e_i)/p_V(e_i),\ i \in \mathbf{I}\}$$

monoton ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{U}_D(E) = \{V, V = \{x \in E, q_U(x) \leqslant \epsilon\}, U \in \mathfrak{U}(E), \epsilon > 0\}.$$

LEMMA 2. *Es sei X ein normierter Raum mit der Einheitskugel X_U, $P\colon X \to X$ eine lineare Abbildung mit $\|P\| \leqslant 1$, $P^2 = P$ und* $\dim P(X) = n + 1$. *Dann folgt für jede beschränkte Teilmenge A von X aus der Beziehung*

$$X_U \cap P(X) \subset \delta^{-1} A$$

die Ungleichung

$$\delta_n(A, X_U) \geqslant \delta.$$

Dieses Lemma ist bei Pietsch bewiesen ([5], S. 130).

LEMMA 3. *Für die mit den Zahlen $\delta_0 \geqslant \delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots > 0$ gebildete beschränkte Teilmenge A von l^p*

$$A = \left\{\eta \in l^p, \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i|^p \delta_i^{-1} \leqslant 1\right\}$$

gelten die Identitäten

$$\delta_i(A, U) = \delta_i^{1/p}.$$

(*U ist die Einheitskugel von l^p.*)

Beweis. Wir betrachten in l^p in Anlehnung an Pietsch die linearen Teilräume

$$F_m = \{\eta \in l^p, \eta_i = 0 \text{ für } i \geqslant m\}.$$

Dann bestehen wegen

$$\sum_{i=m}^{\infty} |\eta_i|^p \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} \delta_m \delta_i^{-1} |\eta_i|^p \leqslant \delta_m \sum_{i=m}^{\infty} \delta_i^{-1} |\eta_i|^p \leqslant \delta_m$$

die Beziehungen

$$A \subset \delta_m^{1/p}\, U + F_m.$$

Also ist

$$\delta_m(A, U) \leqslant \delta_m^{1/p}.$$

Wir betrachten nun die Abbildungen $P_m\colon l^p \to l^p$ mit

$$\eta \mapsto \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, 0, 0, \ldots\}.$$

Dann gilt $\|P_m\| \leqslant 1$, $P_m{}^2 = P_m$ und $F_{m+1} = P_m(l^p)$.

Wegen

$$\sum_{i=0}^{m} \delta_i^{-1} |\delta_m^{1/p} \eta_i|^p = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^{-1} \delta_m |\eta_i|^p \leqslant \sum_{i=0}^{m} |\eta_i|^p$$

gilt

$$U \cap F_{m+1} \subset \delta_m^{-1/p} A.$$

Also folgt aus Lemma 2

$$\delta_m(A, U) \geqslant \delta_m^{1/p},$$

damit gilt also

$$\delta_m(A, U) = \delta_m^{1/p}.$$

Wir kommen nun dazu, für einen (F)-Raum E mit p-absoluter regulärer Basis $\{e_i\}$ die i-ten Durchmesser zu berechnen und die in Satz 2 garantierten Teilräume zu bestimmen. Wir betrachten zwei Nullumgebungen

$$V_k = \left\{ x \in E, \sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, f_i \rangle|^p p_k(e_i)^p \leqslant 1 \right\},$$

$k \in \{1,2\}$ mit $V_1 \subset V_2$. Wegen $V_1 \subset V_2$ ist $\{p_2(e_i)/p_1(e_i)\}$ monoton fallend. Die Menge

$$V_1 = \left\{ x \in E, \sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, f_i \rangle|^p \left(\left\{ \frac{p_2(e_i)}{p_1(e_i)} \right\}^{-1} p_2(e_i) \right)^p \right\} \leqslant 1$$

entspricht der Menge A in Lemma 3, der Raum λ^p

$$\lambda^p = \left\{ \eta = \{\langle x, f_i \rangle\}, \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i|^p p_2(e_i)^p < \infty, x \in E \right\}$$

ist ein dichter Teilraum von l^p mit der Einheitskugel

$$\left\{ \eta \in \lambda^p, \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i|^p p_2(e_i)^p \leqslant 1 \right\}.$$

Daher erhalten wir aus Lemma 3 den

SATZ 3. *Es sei E ein (F)-Raum mit p-absoluter regulärer Basis $\{e_i\}$. Sei $E_i = \operatorname{spann}[e_0, e_1, \ldots, e_{i-1}]$, $V_1, V_2 \in \mathfrak{U}_D(E)$ mit $V_1 \subset V_2$. Dann ist*

$$\delta(V_1, V_2, E_i) = \delta_i(V_1, V_2) = \frac{p_2(e_i)}{p_1(e_i)}.$$

Für einen (F)-Raum mit Basis $\{e_i\}$ bilden wir den linearen Approximationsoperator

$$L_n x = \sum_{i=0}^{n-1} \langle x, f_i \rangle e_i.$$

Dann erhalten wir aus Satz 2 die Fehlerabschätzung

SATZ 4. *Es sei E ein (F)-Raum mit p-absoluter regulärer Basis $\{e_i\}$. Dann gilt für alle $x \in E$ und für alle U, $V \in \mathfrak{U}_D(E)$ mit $V \subset U$ die Fehlerabschätzung*

$$p_U(x - L_n x) \leqslant \frac{p_U(e_n)}{p_V(e_n)} p_V(x).$$

Da in einem nuklearen (F)-Raum jede Basis absolut ist, gilt Satz 4 in allen nuklearen (F)-Räumen mit regulärer Basis. Wir verweisen auf die Beispiele in [*6*]. Wir geben daher abschließend ein Beispiel eines nicht nuklearen (M)-Raumes mit 2-absoluter regulärer Basis an.

Es sei $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine integrierbare Funktion mit der Periode 2π und es gelte

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0.$$

Dann ist für jede Zahl $\alpha > 0$ das Integral $I_\alpha(f)$ der Ordnung α definiert durch

$$I_\alpha(f)(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

und die Ableitung der Ordnung $\alpha = n + \gamma$ $(0 \leqslant \gamma < 1)$ durch

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} I_{1-\gamma}(f)(t).$$

(Diese Definition geht auf H. Weyl zurück, vgl. Zygmund [*10*].) Insbesondere gilt

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \operatorname{cost} nt = n^\alpha (c_\alpha \cos nt + s_\alpha \sin nt),$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sin nt = n^\alpha (c_\alpha \sin nt - s_\alpha \cos nt),$$

mit

$$c_\alpha = \cos \frac{\pi}{2}(1-\gamma),$$

$$s_\alpha = \sin \frac{\pi}{2}(1-\gamma).$$

Wir setzen

$$\sigma(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

für eine beliebige integrierbare Funktion der Periode 2π und definieren die Halbnormen

$$p_0(f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

$$p_\alpha(f) = \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (f(t) - \sigma(f)) \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

für $\alpha > 0$.

Auf dem linearen Raum $Hö_\alpha{}^2$ aller 2π-periodischen Funktionen f mit

$$p_\beta(f) < \infty \qquad \text{für alle } \beta \text{ mit } 0 \leqslant \beta < \alpha$$

wird durch das Halbnormensystem $\{p_\beta, 0 \leqslant \beta < \alpha\}$ eine separierte lokalkonvexe Topologie gegeben, so daß $Hö_\alpha{}^2$ ein (F)-Raum ist. Jede Funktion $f \in Hö_\alpha{}^2$ gestattet eine Fourier-Entwicklung

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

und es gilt

$$p_\beta(\cos nt) = n^\beta (c_\beta{}^2 + s_\beta{}^2)^{1/2} = n^\beta,$$

$$p_\beta(\sin nt) = n^\beta (c_\beta{}^2 + s_\beta{}^2)^{1/2} = n^\beta,$$

$$p_\beta(f) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n{}^2 + b_n{}^2) n^{2\beta}\right)^{1/2}.$$

Also wird die Topologie von $Hö_\alpha{}^2$ durch die Halbnormen

$$p_0(f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2 p_0(\cos nt)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2 p_0(\sin nt)^2\right)^{1/2}$$

und

$$p_\beta(f) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 p_\beta(\cos nt)^2 + b_n{}^2 p_\beta(\sin nt)^2\right)^{1/2}$$

für $0 < \beta < \alpha$ erzeugt.

Die Basis $\{1, \cos nt, \sin nt, n \in \mathbf{N}\}$ ist daher 2-absolut und regulär. Bezeichnet man mit $(s_\alpha{}^2)$ den gestuften Raum 2. Ordnung [3], der aus allen Zahlenfolgen $\{\eta_n\}$ mit

$$q_\beta(\eta) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 n^{2\beta}\right)^{1/2} < \infty \qquad \text{für } 0 \leqslant \beta < \alpha$$

besteht, so ist durch

$$f \mapsto \{a_0\} \times \{a_n, n \in \mathbf{N}\} \times \{b_n, n \in \mathbf{N}\}$$

ein Isomorphismus von $Hö_\alpha{}^2$ auf $\mathbf{R} \times (s_\alpha{}^2) \times (s_\alpha{}^2)$ gegeben. Da $(s_\alpha{}^2)$ nach einem Kriterium von Grothendieck und Pietsch nur für $\alpha = \infty$ nuklear ist ($(s_\infty{}^2)$ ist der Raum (s) der schnell fallenden Zahlenfolgen), aber nach einem Kriterium von Köthe ein (M)-Raum ist, ist auch $Hö_\alpha{}^2$ nicht nuklear für $\alpha < \infty$. Aus Satz 4 erhalten wir also für die Approximation einer z.B. ungeraden Funktion aus $Hö_\alpha{}^2$ durch Sinusfunktionen die Fehlerabschätzung für die Ableitungen

$$p_\beta(f - L_n f) \leqslant n^{\gamma - \beta} p_\gamma(f)$$

für $\gamma \leqslant \beta$. Weitere (M)-Räume werden in [8] behandelt.

Literatur

1. C. Bessaga, A. Pelczynski, und S. Rolewicz, On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1961), 677–683.
2. M. M. Dragilew, Über reguläre Basen in nuklearen Räumen. *Mat. Sb.* **68** (1965), 153–173.
3. G. Köthe, "Lineare topologische Räume." Springer, 1960.
4. D. Pallaschke, Der Satz von Bernstein für metrische lineare Räume. *Schriften Ges. Math. Datenverarbeitung*, Bonn (erscheint demnächst).
5. A. Pietsch, "Nukleare lokalkonvexe Räume." Akademie-Verlag, Berlin, 1965.
6. E. Schock, Beste Approximation von Elementen eines nuklearen Raumes. *J. Approx. Theory* **1** (1968), 77–84.
7. E. Schock, (F)-Räume mit p-absoluter Basis. *Archiv. Math.* (erscheint demnächst).
8. E. Schock, (M)-Räume von Hölderstetigen Funktionen. In Vorbereitung.
9. A. F. Timan, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable." Pergamon, London, 1963.
10. A. Zygmund, "Trigonometric Series II." Cambridge Univ. Press, London and New York, 1959.